

文章编号: 1000-7598-(2013) 增 1-0028-07

移动荷载下黏弹性半空间体上双层板的动力响应

李皓玉, 齐月芹, 刘 进

(石家庄铁道大学 工程力学系, 石家庄 050043)

摘 要: 采用黏弹性半空间体上无限大双层板模型模拟路面结构, 通过三重 Fourier 积分变换得到单位脉冲荷载作用下路面动力响应的 Green 函数。根据线性系统的叠加原理, 利用广义 Duhamel 积分推导出移动荷载作用下路面动力响应的解析解。采用自适应 Simpson 法编制了计算奇异、振荡函数的广义积分计算程序, 完成了路面动力响应从波数-频率域到时间-空间域的转变。结合算例, 对移动荷载作用下路面的振动规律进行研究, 讨论上、下层板厚度和板材料的弹性模量对路面动力响应的影响, 明确了路面结构的振动特性, 研究结果可为路面结构的设计、施工提供理论指导。

关 键 词: 黏弹性半空间; 无限大双层板; 动力响应; 移动荷载; 积分变换

中图分类号: U 416.01

文献标识码: A

Dynamic responses of a two-layer plate on viscoelastic half-space foundation under moving loads

LI Hao-yu, QI Yue-qin, LIU Jin

(Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: An infinite two-layer plate on viscoelastic half-space foundation subjected to moving loads is employed as the model of pavement structure. The dynamic Green's function of the pavement under the unit impulse load is developed using a triple Fourier transform. Based on the superposition principle of linear system, the analytical solutions of the steady-state displacement and stress responses are then derived by combining the generalized Duhamel integral with the Green's function. The adaptive Simpson numerical algorithm is successfully used to calculate the multiple integral of singular and oscillatory function, and transfers the solutions from the wavenumber-frequency domain to the time-space domain. The vibration characteristics of the pavement under moving constant and harmonic loads are analyzed through some numerical examples; and parameter studies then follow to show the effect of plate thickness and elastic modulus of plate material on the dynamic responses of the pavement structure. The results give an insight into the vibration regularities of pavement under moving loads, and may have important theoretical significance and reference value for the design and construction of pavement.

Key words: viscoelastic half-space; an infinite two-layer plate; dynamic responses; moving load; integral transform

1 引 言

随着国民经济和公路交通运输业的快速发展, 高速重载成为道路的发展趋势, 重型车辆对路面的动荷载是造成路面破坏的主要原因之一。高速公路的静力法设计越来越难以满足要求, 研究车辆荷载作用下路面的动力学行为, 揭示路面的破坏机制, 推动路面结构设计从静态向动态转化已成为道路界研究的热点问题之一。

由于理论分析的复杂性, 目前在求解路面结构

动力响应的解析解时, 一般将车辆荷载简化为移动的恒载和简谐荷载, 将路面结构简化为黏弹性地基 (Winkler 或 Kelvin) 上的 Kirchhoff 薄板。Frýba^[1]分析了移动荷载作用下两端支承有限大板和地基支承无限大板的动力响应, 给出了板挠度的解析解。Kim 等^[2-4]研究了移动恒载和简谐荷载作用下 Kelvin 地基上无限大 Kirchhoff 薄板的动力响应, 采用快速 Fourier 变换进行数值计算, 分析了各类参数对板挠度的影响。Sun^[5-6]采用积分变换和 Green 函数法, 求得了移动荷载作用下板瞬态挠度和稳态挠度的积

收稿日期: 2012-06-28

基金项目: 国家自然科学基金重点项目资助 (No. 10932006); 河北省自然科学基金资助 (No. E2011210055, No. E2012210025); 河北省重点基础研究资助项目 (No. 10963528D)。

第一作者简介: 李皓玉, 女, 1971 年生, 博士, 教授, 主要从事路基路面动力学研究。E-mail: Lihygl@sohu.com

分解析解,被周华飞等^[7-8]用于研究类似问题。郑小平利用振型叠加法,得到了运动荷载下弹性地基上矩形薄板动力响应的级数解^[9]。颜可珍^[10]采用积分变换和级数展开相结合的方法,对黏弹性地基上无限长、有限宽薄板的动力响应进行了研究,给出了板动力响应的解析解。卢正等^[11]采用双重 Fourier 变换,研究了变速荷载作用下黏弹性地基板的振动特性,分析了荷载加速度对板动态挠度的影响。

黏弹性地基上的单层板模型结构简单,它以弹簧和阻尼器模拟地基,以单层薄板模拟路面,既不能反映沥青路面的层状体系结构,又不能考察波在地基中的传播。本文在前人研究的基础上对传统的单层无限大 Kirchhoff 薄板模型进行改进,建立了黏弹性半空间体上的无限大双层板模型。基于线性系统的叠加原理,采用积分变换法推导出了移动荷载作用下双层板变形和应力响应的解析解,结合算例分析了移动荷载作用下路面的振动特性。

2 力学模型及其控制方程

2.1 双层板的运动微分方程

黏弹性半空间体上的无限大双层板模型如图 1 所示。假设板和黏弹性半空间体之间为光滑接触,上、下层板可用于描述路面结构的面层和基层,其厚度、弹性模量、泊松比和密度分别为 h_1 、 E_1 、 μ_1 、 ρ_1 和 h_2 、 E_2 、 μ_2 、 ρ_2 。 $F(x, y, t)$ 为板受到的车辆移动荷载, $P(x, y, t)$ 为黏弹性半空间体作用于板的垂向反力,参考文献[12],可推得双层板以垂向位移 w_{zb} 表示的运动微分方程:

$$D \left(\frac{\partial^4 w_{zb}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_{zb}}{\partial y^4} \right) + 2(D_{xy} + 2D_k) \frac{\partial^4 w_{zb}}{\partial x^2 \partial y^2} + m_b \frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial t^2} = F(x, y, t) - P(x, y, t) \quad (1)$$

式中: $m_b = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$ 为双层板单位面积的质量; D 、 D_{xy} 分别为板的弯曲; D_k 扭转刚度,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} D &= \int_{h_0-h_1}^{h_0} \frac{E_1}{1-\mu_1^2} z^2 dz + \int_{h_0-h_1-h_2}^{h_0-h_1} \frac{E_2}{1-\mu_2^2} z^2 dz \\ D_{xy} &= \int_{h_0-h_1}^{h_0} \frac{E_1 \mu_1}{1-\mu_1^2} z^2 dz + \int_{h_0-h_1-h_2}^{h_0-h_1} \frac{E_2 \mu_2}{1-\mu_2^2} z^2 dz \\ D_k &= \int_{h_0-h_1}^{h_0} \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} z^2 dz + \int_{h_0-h_1-h_2}^{h_0-h_1} \frac{E_2}{2(1+\mu_2)} z^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: h_0 为双层板的中性层距板上表面的距离,

$$h_0 = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (2h_1 + h_2) h_2}{2E_1 h_1 + 2E_2 h_2} \quad (3)$$

该问题的边界条件和初始条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^n w_{zb}}{\partial x^n} &= 0; \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^n w_{zb}}{\partial y^n} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ w_{zb}(x, y, t)|_{t=0} &= \frac{\partial w_{zb}(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

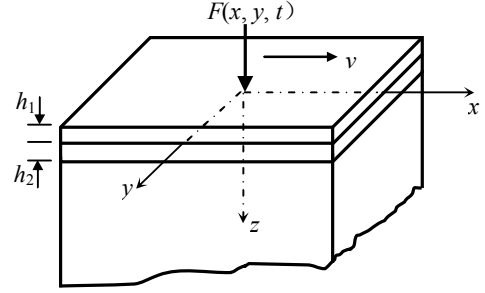


图 1 黏弹性半空间体上无限大双层板

Fig.1 An infinite two-layered plate on viscoelastic half-space foundation

2.2 黏弹性半空间体的运动方程

黏弹性半空间体的密度、泊松比、弹性模量和 Lamé 常数分别用 ρ 、 μ 、 E 、 λ 、 G 表示; x 、 y 、 z 三个方向的位移用 $u_i(u_x, v_y, w_z)$ 表示,则均质各向同性黏弹性半空间体以位移表示的控制方程为

$$(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) + G \nabla^2 \mathbf{u}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} \quad (5)$$

该问题在 $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$, $z = +\infty$ 处的边界条件为

$$u_x = 0; v_y = 0; w_z = 0; \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0; \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

在 $z = 0$ 平面处的应力边界条件为

$$\sigma_z = -P(x, y, t); \quad \tau_{xz} = 0; \quad \tau_{yz} = 0 \quad (7)$$

黏弹性半空间体与双层板在接触面上的位移相容条件为

$$w_z(x, y, 0, t) = w_{zb}(x, y, t) \quad (8)$$

2.3 车辆移动荷载的描述

本文采用矩形均布荷载模拟轮胎对路面的作用^[13],即假设以速度 v 沿 x 轴正向匀速运动的简谐荷载 $F(x, y, t)$ 均匀分布在矩形区域 $\{-l_1 \leq x \leq l_1, -l_2 \leq y \leq l_2\}$ 内,对于路面的稳态响应,该荷载可表示为

$$F(x, y, t) = \frac{F_0}{4l_1 l_2} e^{j\omega_0 t} H(l_1^2 - (x - vt)^2) H(l_2^2 - y^2) \quad (9)$$

式中: j 为虚数单位, $j^2 = -1$; $H(\cdot)$ 为单位阶跃函数; F_0 为简谐荷载的幅值; $\omega_0 = 2\pi f_0$ 为简谐荷载的

加载频率, 若令 $\omega_0 = 0$, 即表示移动恒载。

3 动力响应的稳态解析解

3.1 动力响应的 Green 函数

根据 Helmholtz 定理, 直角坐标系下黏弹性半空间体的位移矢量可分解为

$$\mathbf{u}_i(u_x, v_y, w_z) = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi_i(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \quad (10)$$

式中: Φ 、 Ψ_i 分别为位移 $\mathbf{u}_i$ 的标量势和矢量势。

令 $\mathbf{g}_i(g_1, g_2, g_3) = \nabla \times \Psi_i$, 展开式 (10), 可得

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g_1; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + g_2; \quad w_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + g_3 \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (5), 则 Φ 和 $\mathbf{g}_i$ 满足:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{g}_i - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_i}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

式中: $C_p = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$ 为纵波 (P 波) 波速; $C_s = \sqrt{G/\rho}$ 为横波 (S 波) 波速。

同时, 矢量势 $\mathbf{g}_i$ 还需满足 $\nabla \mathbf{g}_i = 0$, 即

$$\Theta = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

定义三维 Fourier 变换对为

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(k_1, k_2, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, t) e^{-j(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dx dy dt \\ f(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(k_1, k_2, \omega) e^{j(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

对式 (12) 关于空间变量 x, y 和时间变量 t 进行三维 Fourier 变换得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}(k_1, k_2, \omega)}{\partial z^2} - B_p^2 \bar{\Phi}(k_1, k_2, \omega) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{g}}_i(k_1, k_2, \omega)}{\partial z^2} - B_s^2 \bar{\mathbf{g}}_i(k_1, k_2, \omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} B_p^2 &= k_1^2 + k_2^2 - k_p^2; \quad B_s^2 = k_1^2 + k_2^2 - k_s^2 \\ k_p &= \omega/C_p; \quad k_s = \omega/C_s \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式 (15) 所示的微分方程具有如下形式的解:

$$\bar{\Phi} = A_4 e^{-B_p z}; \quad \bar{\mathbf{g}}_i = A_i e^{-B_s z} \quad (17)$$

考虑式 (6) 中 $z = +\infty$ 时的边界条件, 式 (17) 舍去了指数增长项 $e^{B_p z}$ 和 $e^{B_s z}$, A_i 为待求积分常数。

黏弹性半空间体的几何方程和物理方程分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ik} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ik} + 2G \varepsilon_{ik} \quad (19)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}_{ik}$ 为应变张量 ($i, k = x, y, z$); $\boldsymbol{\sigma}_{ik}$ 为应力张量; $\varepsilon_{mm} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 为体积应变; u_{ik} 为 u_i 对于 k 取偏导数; u_{ki} 为 u_k 对 i 取偏导数; δ_{ik} 为 Kroneker 符号, 当 $i = k$ 时, $\delta_{ik} = 1$, 当 $i \neq k$ 时, $\delta_{ik} = 0$ 。

联立式 (18)、(19) 和式 (11), 可得用 Φ 和 $\mathbf{g}_i$ 表示的应力分量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \lambda \frac{1}{C_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2G \frac{\partial g_3}{\partial z} \\ \tau_{zx} &= G \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} &= G \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial g_2}{\partial z} + \frac{\partial g_3}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

推导式 (20) 时用到了式 (12) 和式 (13)。将式 (13) 和式 (20) 关于空间变量 x, y 和时间变量 t 进行三维 Fourier 变换, 并将式 (17) 代入, 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= -\lambda k_p^2 A_4 e^{-B_p z} + 2GB_p^2 A_4 e^{-B_p z} - 2GB_s A_3 e^{-B_s z} \\ \bar{\tau}_{zx} &= G(-2jk_1 B_p A_4 e^{-B_p z} - B_s A_4 e^{-B_s z} + jk_1 A_3 e^{-B_s z}) \\ \bar{\tau}_{zy} &= G(-2jk_2 B_p A_4 e^{-B_p z} - B_s A_2 e^{-B_s z} + jk_2 A_3 e^{-B_s z}) \\ \bar{\Theta} &= jk_1 A_1 e^{-B_s z} + jk_2 A_2 e^{-B_s z} - B_s A_3 e^{-B_s z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

以单位脉冲荷载 $F(x, y, t) = \delta(x)\delta(y)\delta(t)$ 代入式 (1), 并对式 (1) 两边关于空间变量 x, y 和时间变量 t 进行三维 Fourier 变换得

$$\left[D(k_1^4 + k_2^4) + 2(D_{xy} + 2D_k)k_1^2 k_2^2 - \rho h \omega^2 \right] \bar{w}_{zb} = 1 - \bar{P}(k_1, k_2, \omega) \quad (22)$$

根据式 (8)、(11) 及式 (17), 可知

$$\begin{aligned} \bar{w}_{zb} &= \bar{w}_z|_{z=0} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} + \bar{g}_3 = \\ &= -B_p A_4 e^{-B_p z} + A_3 e^{-B_s z} \Big|_{z=0} = -B_p A_4 + A_3 \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (22) 可得

$$-\bar{P}(k_1, k_2, \omega) = [D(k_1^4 + k_2^4) + 2(D_{xy} + 2D_k)k_1^2 k_2^2 - \rho h \omega^2](-B_p A_4 + A_3) - 1 \quad (24)$$

由应力边界条件式 (7) 可知, 式 (24) 即为黏弹性半空间体表面 $z = 0$ 处的垂向应力 σ_z 在变换域内的表达式, 即 $\bar{\sigma}_z = -\bar{P}(k_1, k_2, \omega)$ 。

$$\text{令 } D_1 = D(k_1^4 + k_2^4) + 2(D_{xy} + 2D_k)k_1^2 k_2^2 - \rho h \omega^2,$$

将式 (24) 和式 (7) 代入式 (21)，整理可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2B_s - D_1/G & (k_1^2 + k_2^2 + B_s^2) + D_1B_p/G \\ -B_s & 0 & jk_1 & -2jk_1B_p \\ 0 & -B_s & jk_2 & -2jk_2B_p \\ k_1 & k_2 & jB_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/G \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

求解式 (25) 可得

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{2jk_1B_pB_s}{GA}; \quad A_2 = \frac{2jk_2B_pB_s}{GA} \\ A_3 &= -\frac{2B_p(k_1^2 + k_2^2)}{GA}; \quad A_4 = -\frac{(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)}{GA} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中：

$$\Delta = [(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2) + D_1B_p/G](k_1^2 + k_2^2 + B_s^2) - 2B_p(2B_s + D_1/G)(k_1^2 + k_2^2) \quad (27)$$

对式 (11) 进行 Fourier 变换，并将 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 的表达式代入，可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{j}{GA} [-k_1(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} + 2k_1B_pB_s e^{-B_s z}] \\ \bar{v}_y &= \frac{j}{GA} [-k_2(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} + 2k_2B_pB_s e^{-B_s z}] \\ \bar{w}_z &= \frac{1}{GA} [B_p(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} - 2B_p(k_1^2 + k_2^2)e^{-B_s z}] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

根据几何方程式 (18) 和物理方程式 (19) 可得变换域内的应力表达式。限于篇幅，下面仅给出纵向（行车方向）正应力 σ_x 的表达式：

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{GA} [(\lambda k_p^2 + 2Gk_1^2)(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} - 4Gk_1^2B_pB_s e^{-B_s z}] \quad (29)$$

对式 (28) 和式 (28) 进行 Fourier 逆变换，可得到单位脉冲荷载作用下黏弹性半空间体的位移和应力，即黏弹性半空间体动力响应的 Green 函数，下面仅给出垂向位移和纵向正应力的表达式：

$$G_{w_z}(x, y, 0, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} [B_p(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} - 2B_p(k_1^2 + k_2^2)e^{-B_s z}] e^{j(k_1x + k_2y + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \quad (30)$$

$$G_{\sigma_x}(x, y, 0, t) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3 G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} [(\lambda k_p^2 + 2Gk_1^2)(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} - 4Gk_1^2B_pB_s e^{-B_s z}] e^{j(k_1x + k_2y + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \quad (31)$$

3.2 动力响应的解析解

利用 Green 函数和广义 Duhamel 积分，可以求出移动荷载作用下黏弹性半空间体上无限大双层板动力响应的解析解。广义 Duhamel 积分的表达式^[7-8]为

$$u_{ki}(x, y, z, t) = \int_S \int_0^t F(\zeta_1, \zeta_2, \tau) \cdot G_{ki}(x - \zeta_1, y - \zeta_2, z, t - \tau) d\tau dS \quad (32)$$

式中：等号右侧是移动荷载和 Green 函数的卷积积分；等号左侧表示移动荷载 F 沿 e_k 方向作用在黏弹性体表面时在黏弹性体内 (x, y, z) 位置处产生的沿 e_i 方向的响应。

将式 (9) 分别和式 (30)、(31) 代入式 (32)，可得移动简谐荷载作用下黏弹性半空间体的垂向位移和纵向正应力：

$$w_z = \frac{F_0}{(2\pi)^2 G} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_1 l_1)}{k_1 l_1} \frac{\sin(k_2 l_2)}{k_2 l_2} \cdot \frac{1}{\Delta} [B_p(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} - 2B_p(k_1^2 + k_2^2)e^{-B_s z}] \cdot e^{j[k_1(x-vt) + k_2 y]} dk_1 dk_2 \quad (33)$$

$$\sigma_x = \frac{F_0}{(2\pi)^2 G} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_1 l_1)}{k_1 l_1} \frac{\sin(k_2 l_2)}{k_2 l_2} \cdot \frac{1}{\Delta} [(\lambda k_p^2 + 2Gk_1^2)(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2)e^{-B_pz} - 4Gk_1^2B_pB_s e^{-B_s z}] e^{j[k_1(x-vt) + k_2 y]} dk_1 dk_2 \quad (34)$$

式中： $k_p = (\omega_0 - vk_1)/C_p$ ； $k_s = (\omega_0 - vk_1)/C_s$ ，而且 B_p 、 B_s 和 Δ 也需作相应修改。

根据式 (8) 的位移相容条件，令式 (33) 中的 $z = 0$ ，即得双层板的垂向位移：

$$w_{zb} = \frac{F_0}{(2\pi)^2 G} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_1 l_1)}{k_1 l_1} \frac{\sin(k_2 l_2)}{k_2 l_2} \cdot \frac{1}{\Delta} [B_p(k_1^2 + k_2^2 + B_s^2) - 2B_p(k_1^2 + k_2^2)] \cdot e^{j[k_1(x-vt) + k_2 y]} dk_1 dk_2 \quad (35)$$

上层板内纵向正应力的表达式为

$$\sigma_{xb} = -\frac{E_1 z}{1-\mu_1^2} \left[\frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial y^2} \right] = \frac{E_1 z}{1-\mu_1^2} \frac{F_0}{(2\pi)^2 G} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k_1 l_1)}{k_1 l_1} \frac{\sin(k_2 l_2)}{k_2 l_2} \cdot \frac{(k_1^2 + \mu k_2^2)}{\Delta} [B_p (k_1^2 + k_2^2 + B_s^2) - 2B_p (k_1^2 + k_2^2)] \cdot e^{j[k_1(x-vt)+k_2 y]} dk_1 dk_2 \quad (36)$$

将式 (36) 中的 E_1 、 μ_1 分别换成 E_2 、 μ_2 ，即得下层板内的应力计算公式。

式 (33)~(36) 中，若令 $\omega_0 = 0$ ，即得移动恒载作用下黏弹性半空间体上无限大双层板的垂向位移和纵向正应力的解析解。

4 数值计算

移动荷载作用下黏弹性半空间体上双层板位移和应力响应的解析解均为广义无穷二重积分，且被积函数振荡、奇异，考虑到积分的复杂性，笔者采用自适应 Simpson 算法，运用 Mathmatics 语言^[14]在程序对黏弹性半空间体上双层板的动力响应上的实现。黏弹性半空间体和双层板的材料参数取值见表 1，数值计算中其他参数取值为，移动恒载 $F = 50$ kN，移动简谐荷载幅值 $F_0 = 15$ kN，频率 $f_0 = 15$ Hz，轮胎接地尺寸 $l_1 = 0.11$ m， $l_2 = 0.16$ m，行车速度 $v = 25$ m/s。

表 1 路面结构的材料参数

Table 1 Material parameters of pavement structure

路面结构	层厚 / m	弹性模量 / MPa	泊松比	密度 / (kg/m ³)
上层板	0.15	1 500	0.35	2 613
下层板	0.20	1 200	0.35	2 083
地基		50	0.35	2 000

实际计算中，为考虑黏弹性半空间体材料阻尼的影响，采用线性滞回阻尼理论引入材料阻尼，即

$$E^* = (1 + 2j\xi)E; \quad G^* = (1 + 2j\xi)G; \quad \lambda^* = (1 + 2j\xi)\lambda \quad (37)$$

式中： ξ 为材料阻尼比，在此取 $\xi = 0.05$ 。

4.1 结果验证

由于缺乏可供直接比较的资料，而本文中的黏弹性半空间体上无限大双层板模型可以很方便地退化为黏弹性半空间模型（令双层板的厚度为 0）。

Hung 等^[15]曾采用直接积分变换法，计算了黏弹性半空间体的动力响应，计算所需参数取值为： $G = 20$ MPa， $\mu = 0.25$ ， $\rho = 2\,000$ kg/m³， $\xi = 0.02$ 。图 2(a)描述了 Hung 求解得到的移动集中恒载下黏弹性半空间体内(0, 0, 1)点的垂向位移。图中的纵坐标采取了标准化处理，即 $W = 2\pi G z w_z / F$ 。

根据 Hung 的计算参数，采用自行编制的程序同样计算了移动集中恒载作用下黏弹性半空间体内(0, 0, 1)点的垂向位移，如图 2(b)所示。对比图 2(a)和图 2(b)可见，本文的计算结果与 Hung 的计算结果是非常一致的。

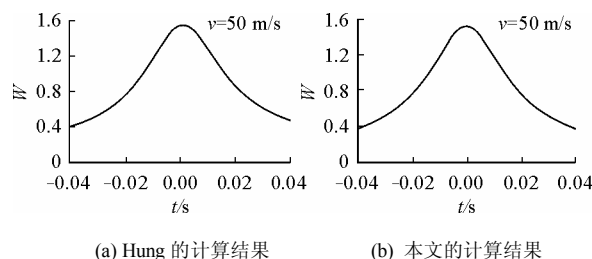


图 2 垂向位移计算结果比较
Fig.2 Comparison of vertical displacements

4.2 动力响应的分布规律

图 3(a)为移动恒载作用下 $x = 0, y = 0$ 处双层板板底纵向正应力 σ_x 的时程曲线，图 3(b)和 3(c)分别为 $x = 0, y = 0$ 处黏弹性半空间体的垂向位移和纵向应力随深度变化的时程曲线。根据位移相容条件，图 3(b)中黏弹性半空间体表面 $z = 0$ 处的垂向位移即为双层板的垂向位移。

图 4 为移动简谐荷载作用下 $x = 0, y = 0$ 处双层板的垂向位移和板底纵向正应力的时程曲线。由图 3、4 可见，(1) 移动恒载作用下双层板板底纵向正应力呈现拉压交替状态，当荷载到来及离去时，计算点呈现压应力状态，荷载到达计算点时呈现拉应力状态，且拉应力值远大于压应力值。(2) 随着深度的增加，黏弹性半空间体内的位移和应力迅速衰减。在所给参数下， $z = 0$ m 处的垂向位移最大值为 $w_{z,\max}$ 为 $-0.273\,5$ mm，纵向拉应力最大值 $\sigma_{x,\max}$ 为 9.46 kPa， $z = 2$ m 处的垂向位移最大值 $w_{z,\max}$ 为 -0.11 mm，纵向拉应力最大值 $\sigma_{x,\max}$ 为 0.037 kPa，垂向位移下降 59.78%，纵向拉应力下降 99.61%。(3) 黏弹性半空间体内的最大纵向拉应力出现在荷载作用点两侧，呈现明显的“马鞍”型。(4) 移动简谐荷载作用下双层板的振动频率加剧，荷载到来及离去时的垂向位移和板底纵向正应力呈现明显的波动趋势。

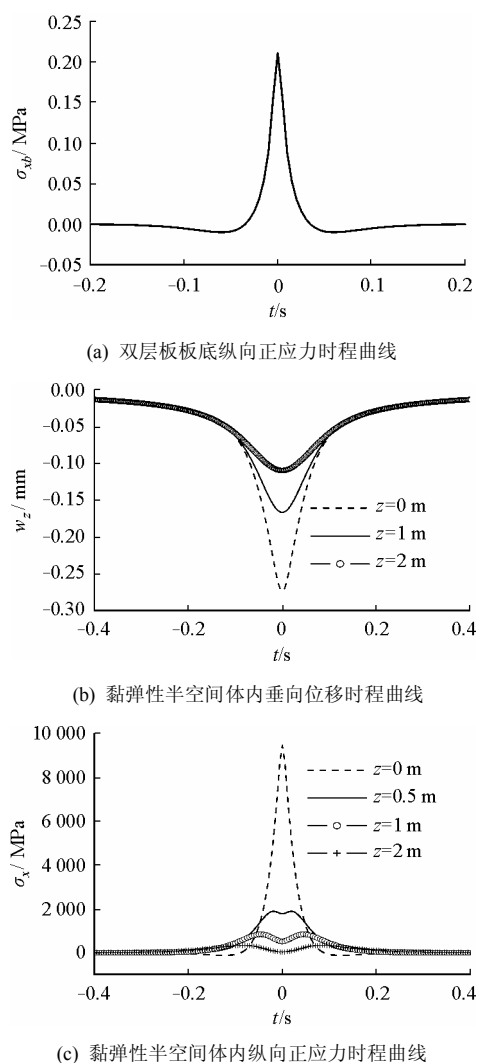


图 3 移动恒载作用下的动力响应

Fig.3 Dynamic responses under moving constant load

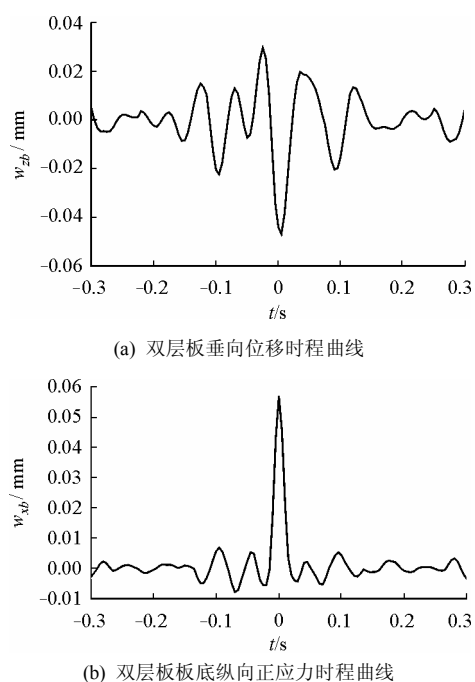


图 4 移动简谐荷载作用下的动力响应

Fig.4 Dynamic responses under moving harmonic load

4.3 板厚度对动力响应的影响

板厚度对黏弹性半空间体上无限大双层板动力响应的影响如图 5 所示。随着上、下层板厚度的增加, 双层板垂向位移的最大值和板底纵向正应力的最大值呈抛物线规律下降, 符合力学规律。上、下层板可分别用于描述路面面层和基层的受力和变形情况, 因此, 在实际应用中适当增加面层和基层厚度可减小路面结构的应力和变形, 提高其使用寿命。

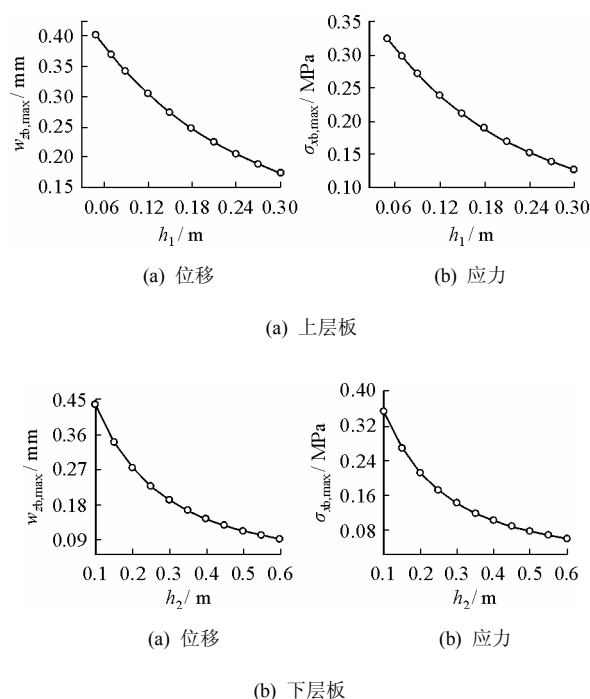


图 5 板厚度的影响

Fig.5 Effect of plate thickness

4.4 板材料弹性模量对动力响应的影响

上层板材料的弹性模量对黏弹性半空间体上无限大双层板动力响应的影响如图 6(a)所示。上层板材料的弹性模量越大, 双层板垂向位移的最大值和板底纵向正应力的最大值越小, 上层板主要反映路面面层的受力和变形情况, 提高面层材料的弹性模量可减小车辆荷载对路面结构的破坏。

下层板材料的弹性模量对黏弹性半空间体上无限大双层板动力响应的影响如图 6(b)所示。下层板材料的弹性模量越大, 双层板垂向位移的最大值越小, 而板底纵向正应力的最大值越大, 下层板主要反映路面基层的受力和变形情况, 路表垂向位移和基层底部纵向拉应力在路面设计中分别用来控制路面的车辙变形和疲劳寿命, 因此, 实际应用中应综合这两方面的因素合理选择基层材料。

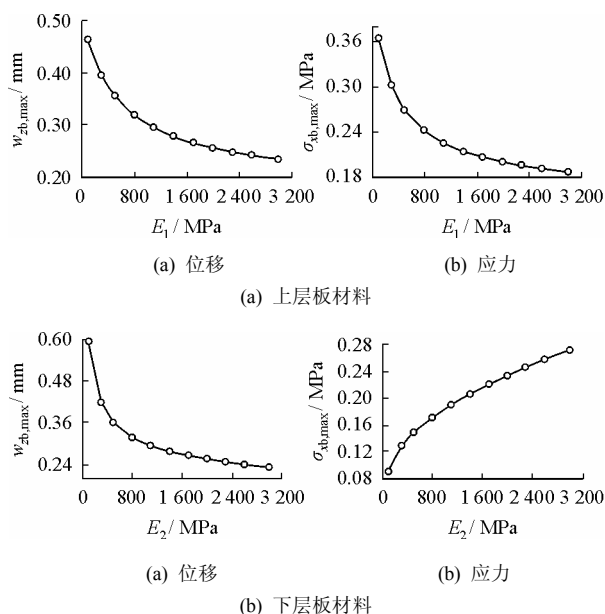


图6 弹性模量的影响

Fig.6 Effect of elastic modulus

5 结论

(1) 黏弹性半空间体内的位移和应力随着深度的增加迅速衰减。纵向拉应力的最大值不是出现在荷载作用点处,而是出现在荷载作用点两侧,呈现明显的“马鞍”型。

(2) 适当增加面层和基层的厚度有利于降低路面结构的动力响应,提高路面使用寿命。

(3) 面层和基层材料的弹性模量越大,路表垂向位移的最大值越小,但基层底部纵向拉应力的最大值却随基层材料弹性模量的增大而增加,实际应用中应综合考虑变形和应力两方面的因素合理选择材料。

参考文献

- [1] FRÝBA L. Vibration of solids and structures under moving loads[M]. London: Thomas Telford, 1999.
- [2] KIM S M, ROESSET J M. Moving loads on a plate on elastic foundation[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(9): 1010—1017.
- [3] KIM S M, MCCULLOUGH B F. Dynamic response of plate on viscous Winkler foundation to moving loads of varying amplitude[J]. *Engineering Structure*, 2003, 25(9): 1179—1188.
- [4] KIM S M. Influence of horizontal resistance at plate bottom on vibration of plates on elastic foundation under moving loads[J]. *Engineering Structure*, 2004, 26(4): 519—529.
- [5] SUN L. Dynamic response of Kirchhoff plate on a viscoelastic foundation to harmonic circular loads[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, 70(4): 595—600.
- [6] SUN L. Dynamics of plate generated by moving harmonic loads[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2005, 72(5): 772—777.
- [7] 蒋建群, 周华飞, 张士乔. 移动荷载下黏弹性地基上无限大板的稳态响应[J]. *中国公路学报*, 2006, 19(1): 6—11. JIANG Jian-qun, ZHOU Hua-fei, ZHANG Tu-qiao. Steady state response of infinite plate on visco-elastic foundation subjected to moving load[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2006, 19(1): 6—11.
- [8] 周华飞, 蒋建群. 刚性路面在运动车辆作用下的动力响应[J]. *土木工程学报*, 2006, 39(8): 117—125. ZHOU Hua-fei, JIANG Jian-qun. Dynamic response of rigid pavements to moving vehicles[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2006, 39(8): 117—125.
- [9] 郑小平, 王尚文. 运动载荷作用下弹性地基简支矩形板的动力响应分析[J]. *航空学报*, 1989, 10(10): 557—560. ZHENG Xiao-ping, WANG Shang-wen. Dynamic analysis of simply supported rectangular plates on an elastic foundation under moving loads[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1989, 10(10): 557—560.
- [10] 颜可珍. 弹性地基上薄板的动力响应研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005.
- [11] 卢正, 姚海林, 吴莎, 等. 黏弹性地基板在矩形变速荷载作用下的振动分析[J]. *岩土力学*, 2010, 31(13): 3613—3618. LU Zheng, YAO Hai-lin, WU Sha, et al. Vibration analysis of a plate on viscoelastic foundation under moving rectangular loads with variable speeds[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(13): 3613—3618.
- [12] YANG S P, LI S H, LU Y J. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement[J]. *Vehicle and System Dynamics*, 2010, 48(8): 923—944.
- [13] HUANG Y H. Pavement analysis and design (2nd edition)[M]. USA: Prentice Hall, 2003.
- [14] 嘉木工作室. Mathematica 应用实例教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
- [15] HUNG H H, YANG Y B. Elastic waves in visco-elastic half-space generated by various vehicle loads[J]. *Solid Dynamics and Earthquake Engineering*, 2001, 21: 1—17.